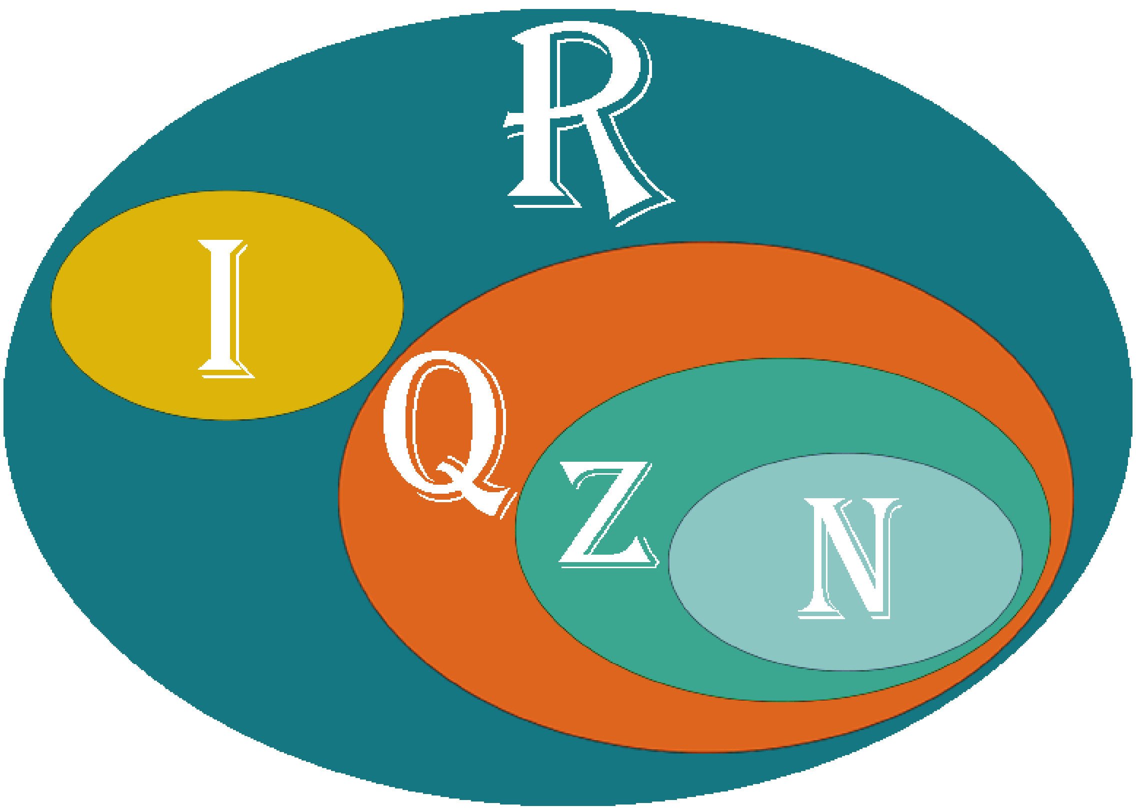
Profesora: Lorena Cuevas Martínez

Guía de Matemáticas

CONJUNTOS NUMERICOS



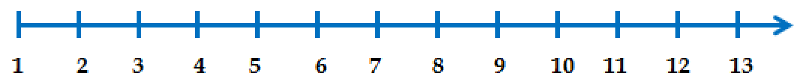
Un conjunto es una colección de objetos que se define mediante una propiedad que todos los elementos cumplen, por ejemplo el conjunto de los colores primarios seria $C = \{rojo, azul, amarillo\}$. En particular, en esta guía estudiaremos los conjuntos numéricos que corresponden a agrupaciones únicamente de números que cumple con algunas propiedades en común.

1. Números Naturales (N)

Los números naturales aparecen por primera vez en el proceso natural que tuvo el ser humano de contar y ordenar animales, comida, objetos, etc.

El conjunto de los números naturales parte con el número 1 o la unidad, y los otros elementos se forman a partir de la adición sucesiva de unidades de la siguiente manera: 1, 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, etc. En base a esto, podemos decir que el conjunto de los números naturales es ordenado y posee infinitos elementos.

El conjunto se designa con la letra N y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., \infty\}$$

1.1. Algunas propiedades de los números naturales

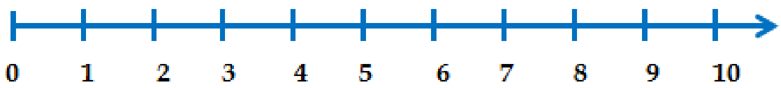
Giuseppe Peano, matemático italiano, fue el creador del sistema axiomático del cual deriva la aritmética de los números naturales, en este caso resulta conveniente acudir a sus axiomas para conocer algunas propiedades que cumplen estos números:

Axiomas de Peano	Versión actual de los axiomas de Peano
1 es un número.	1 es un número natural, por lo tanto el conjunto de los números naturales no es vacío.
El sucesor inmediato de un número también es un número.	Si a es un número natural, entonces el sucesor de a, es decir, $a+1$, también es un número natural.
1 no es el sucesor inmediato de ningún número.	1 no es sucesor de ningún número natural, por lo tanto corresponde al primer elemento del conjunto numérico de los naturales.
Dos números distintos no tienen el mismo sucesor inmediato.	Si los sucesores de dos números naturales a y b son distintos, entonces los números naturales a y b son distintos.
Toda propiedad perteneciente a 1 y al sucesor inmediato de todo número que también tenga esa propiedad pertenece a todos los números.	Si un conjunto de números naturales contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales (Axioma de inducción matemática).

2. Números Cardinales (N_0)

El conjunto de los números cardinales es ordenado infinito y corresponde al conjunto N pero se incluye un elemento, el cero.

El conjunto se designa por N_0 y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



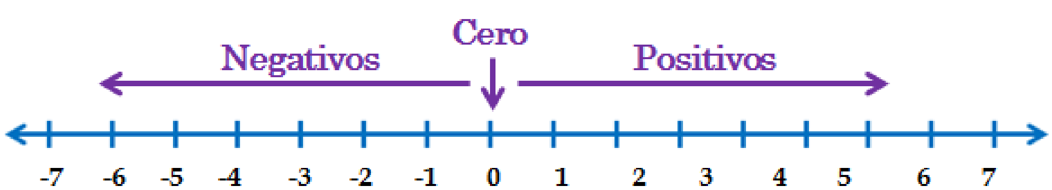
$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty\}$$
$$N_0 = N \cup \{0\}$$

2 Números Enteros (Z)

Los números enteros están presentes desde hace mucho tiempo, los chinos utilizaban bastones de colores para distinguir cantidades positivas o negativas para así diferenciar entre el aumento o la disminución de ciertas magnitudes. Los árabes, por otro parte, dieron a conocer los números negativos que los hindúes utilizaban para designar las pérdidas en asuntos financieros.

El conjunto de los números enteros nace entonces a partir de la necesidad de responder a ciertos problemas matemáticos que los números naturales no podían resolver. En base a esto el conjunto está compuesto por los números naturales, el cero y los opuestos a los números naturales.

El conjunto se designa por Z y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



$$Z = \{-\infty, \ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, \infty\}$$

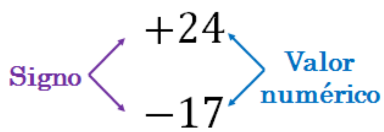
Todo número entero se caracteriza por tener dos elementos:

- Signo: Representa la propiedad que un número tiene de ser negativo(-) o positivo(+).

- Valor absoluto o numérico: Corresponde a la distancia que le separa al número del 0 en la recta numérica. El valor absoluto de un número, es el número pero sin su signo. Por ejemplo, el valor numérico de -12 es 12 o el valor numérico de 3 es 3.

En general el valor absoluto o numérico de x se identifica con $|x|$ y se trabaja como se indica a continuación:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



2.1. Algunos subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$

2.1.1. Enteros negativos

El conjunto de los enteros negativos tiene como elementos a los números naturales precedidos de un signo menos (-), por ejemplo -4. Este conjunto corresponde a todos los enteros menores que 0 y matemáticamente se puede representar como:

$$\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

2.1.2. Conjunto 0

Este conjunto tiene como único elemento el número 0, el cual separa en la recta numérica a los números enteros positivos de los números enteros negativos. Matemáticamente se puede expresar como:

$$\{0\}$$

2.1.3. Enteros positivos

El conjunto de los enteros positivos se puede identificar con el conjunto de los números naturales, por lo tanto, sus elementos son todos los enteros mayores que 0. Matemáticamente se puede representar así:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5\dots, \infty\} = \mathbb{N}$$

Si unimos estos 3 subconjuntos vistos obtenemos el conjunto de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

2.2. Operaciones básicas en $\mathbb{Z}$

2.2.1. Adición de números enteros

- Adición de enteros con igual signo

  Se suman los valores absolutos y se conserva el signo común.
  Por ejemplo al realizar la operación $-6 + -3$ debemos sumar los números 6 y 3 y conservar el signo negativo que tienen:

$$-6 + -3 = -(6 + 3) = -9$$

- Adición de enteros con distinto signo

  Se restan los valores absolutos y se conserva el signo del sumando de mayor valor absoluto.
  Por ejemplo al realizar la operación $-7+2$ nos dara como resultado un número negativo ya que el sumando con mayor valor absoluto (7) es negativo, por lo tanto restamos los números y conservamos el signo $-$:

$$-7+2=-(7-2)=-5$$

Recordar que toda sustracción se puede transformar a una adición. Así, si tenemos $3-4$ es lo mismo que escribir $3+(-4)$. En general si tenemos la resta de dos enteros $a-b$ que puede expresar como una suma de la forma $a+(-b)$

2.2.2. Multiplicación de números enteros

- Multiplicación de enteros con igual signo

  Se multiplican los valores absolutos de los números y se deja el producto positivo.
  Por ejemplo al realizar la operación $-2\cdot-8$ multiplicamos los valores absolutos de los números y lo dejamos son signo positivo:

$$-2\cdot-8=+(2\cdot8)=16$$

- Multiplicación de enteros con distinto signo

  Se multiplican los valores absolutos de los números y se deja el producto negativo.
  Por ejemplo al realizar la operación $-3\cdot5$ multiplicamos los valores absolutos de los números y lo dejamos con signo negativo:

$$-3\cdot5=-(3\cdot5)=-15$$

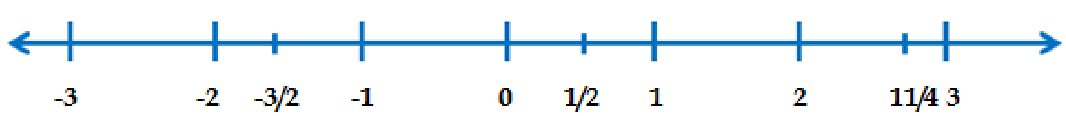
Ejercicios 2

Resolver los siguientes ejercicios combinados

1. $-(5\cdot3+11)+4(-9\cdot3+13\cdot4)$
2. $3(9\cdot-2)-(3\cdot-5+7)+(4\cdot23)$
3. $15+6-4+(-3+2\cdot0)-9$
4. $(3-5\cdot5)-(-1(22\cdot3\cdot-4\cdot-2))+(40-68+4-9)$
5. $(-4\cdot6-7)-(-12(3+((4+32)\cdot8))+1)$
6. $-(-(-2(-(7\cdot12)+5)-24)-8\cdot3)$

3. Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

El conjunto de los números racionales es ordenado y posee infinitos elementos. Este conjunto abarca a todos los anteriores y se le agregan aquellos elementos que se pueden expresar en forma de división entre dos números enteros cualesquiera, con la única restricción de que el divisor o denominador tiene que ser distinto de cero. Por lo tanto los números racionales son todos aquellos que pueden ser representados por medio de fracciones. El conjunto se designa por $\mathbb{Q}$ y se puede representar sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



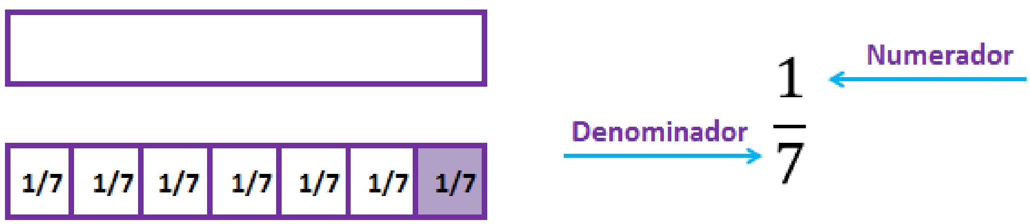
$$\mathbb{Q} = \{-\infty, \ldots, -3, \ldots, \frac{-8}{3}, \ldots, -2, \ldots, \frac{-6}{4}, \ldots, -1, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, 1, \ldots, \infty\}$$

Cabe destacar que este conjunto $\mathbb{Q}$ tiene la propiedad de ser denso, es decir, siempre entre dos racionales cualesquiera, encontraremos un tercero entre medio, por muy próximos que estén los números entre sí.

Entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

3.1. Fracciones, los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$

En nuestro diario vivir utilizamos expresiones como "un cuarto para las 8", "me queda la mitad" o "los goles son válidos desde mitad de cancha". Dentro de éstas expresiones estamos utilizando fracciones ya que hacen alusión a dividir una totalidad en cierta cantidad de partes iguales. En base a esto, una fracción se puede definir como la división de dos números cualesquiera, a/b, donde a (numerador) indica el número de partes iguales que se han tomado y b (denominador distinto de 0) indica el número de partes iguales en la que se ha divido un entero. Por lo tanto, si tenemos $\frac{1}{7}$ significa que dividimos un entero en 7 partes iguales y de esas partes tomamos una.



3.1.1. Tipos de fracciones

- Fracciones Propias

  Una fracción propia tiene el numerador menor que el denominador. Por ejemplo $\frac{2}{5}$.

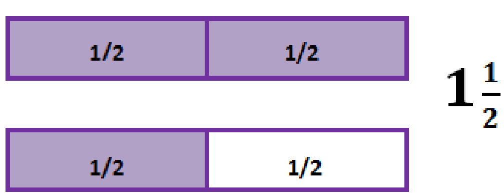
  En general, la fracción $\frac{a}{b}$ es propia si $|a| > |b|$.

- Fracciones Impropias

  Una fracción impropia tiene el numerador mayor que el denominador. Por ejemplo $\frac{13}{8}$.

  En general, la fracción $\frac{a}{b}$ es impropia si $|a| < |b|$.

  Este tipo de fracciones se puede interpretar de la siguiente forma. Si tenemos $\frac{3}{2}$ significa que debemos tomar 3 veces $\frac{1}{2}$, esto lo conseguimos tomando dos partes de un entero dividido en dos y una parte de otro entero equivalente al primero.



Por lo tanto, tomamos finalmente un entero más un medio. Este tipo de números se denominan números mixtos o fracción mixta.

Para transformar una fracción impropia a un número mixto debemos seguir los siguientes pasos:

1. Dividir el numerador por el denominador.
2. Escribir el cociente de la división como un número entero.
3. Escribir el resto encima del denominador.

$$\frac{19}{7}$$

$$19 : 7 = 2$$

$$5$$

$$2\frac{5}{7}$$

Para transformar un número mixto a fracción debemos seguir los siguientes pasos:

1. Multiplicar la parte entera por el denominador.
2. Sumar el resultado al numerador
3. Escribir el resultado sobre el denominador.

$$2\,\frac{5}{7}$$

$$7 \cdot 2 = 14$$

$$14 + 5 = 19$$

$$\frac{19}{7}$$

3.1.2. Equivalencia de fracciones

Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad, es decir, tienen el mismo valor. Las fracciones $\frac{90}{6}$ y $\frac{60}{4}$ valen 15, por lo tanto tienen el mismo valor y son equivalentes entre sí.

Dadas dos fracciones diremos que representan un mismo número racional si cumplen la siguiente condición:

$$\frac{-12}{16} = \frac{6}{-8}$$

$$-12 \cdot -8 = 16 \cdot 6$$

$$96 = 96$$

En general, dados dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

3.1.3. Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción corresponde a dividir ambas partes (numerador y denominador) por un número entero de tal forma que me dé como resultado una fracción equivalente. La fracción $\frac{150}{20}$ la podemos simplificar por el entero 10 para asi obtener una fracción equivalente.

$$\frac{150}{20} = \frac{150:10}{120:10} = \frac{15}{2}$$

En general, una fracción $\frac{a}{b}$ *se puede simplificar por* $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *haciendo:*

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Siempre y cuando c *sea divisor de* a *y* b.

Al momento de simplificar una fracción nos interesa reducirla a su mínima expresión, es decir, dividirla por el mayor número posible. Ese número corresponde al máximo común divisor que existe entre el numerador y el denominador, de esta forma el dividir ambas partes de la fracción por ese número obtenemos inmediatamente la fracción irreducible.

3.1.4. Amplificación de fracciones

Amplificar una fracción corresponde a multiplicar ambas partes (numerador y denominador) por un número entero de tal forma que me dé como resultado una fracción equivalente. La fracción $\frac{2}{5}$ la podemos amplificar por 4 para obtener una fracción equivalente.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

En general, una fracción $\frac{a}{b}$ se puede amplificar por $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ haciendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

3.1.5. Transformación de fracciones

Todo elemento del conjunto de los números racionales se puede expresar como una fracción, pero también pueden ser representados a través de un número decimal, ya que para esto basta realizar la división entre el numerador y el denominador y se puede obtener como resultado un número entero o decimal. Veamos algunas transformaciones importantes:

- De un número entero a fracción

  La fracción tendrá como numerador el número dado, y por denominador, la unidad 1. Por ejemplo $4 = \frac{4}{1}$ ó $-18 = \frac{-18}{1}$.

- De un número con decimales finitos a fracción

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, y por denominador, la unidad 1 seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga. Por ejemplo el número $8,74$ posee dos cifras decimales así que, $8,74 = \frac{874}{100}$ o el número $234,1$ posee una cifra decimal así que, $234,1 = \frac{2341}{10}$.

- De un número con decimales periódicos a fracción

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera, y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período. Por ejemplo el número $2,\overline{45}$ tiene dos cifras periódicas, por lo tanto, $2,\overline{45} = \frac{245-2}{99} = \frac{243}{99}$ o el número $31,\overline{1}$ tiene una cifra periódica así que, $31,\overline{1} = \frac{311-31}{9} = \frac{280}{9}$.

- De un número con decimales semiperiódicos a fracción

  La fracción tendrá como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicas, y por denominador, un numero formado por tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica. Por ejemplo el número $1,63\overline{192}$ tiene 3 cifras periódicas y 2 cifras en la parte decimal no periódicas, por lo tanto se escribirá como $1,63\overline{192} = \frac{163192-163}{99900} = \frac{163029}{99900}$ ó el número $37,2\overline{5}$ tiene 1 cifra periódica y 1 cifra en la parte decimal no periódica, por lo tanto se expresaría como $37,2\overline{5} = \frac{3725-372}{90} = \frac{3353}{90}$.

Ejercicios 3

Transformar a fracción los siguientes números decimales:

1. $13,56$
2. $-87,6$
3. $231,\overline{65}$
4. $-68,\overline{723}$
5. $54,18\overline{3}$
6. $-1,34\overline{95}$

3.2 Orden en $\mathbb{Q}$

Como dijimos al comienzo el conjunto de los números racionales es ordenado, por lo tanto se puede establecer un orden entre los elementos del conjunto, es decir, puedo ordenar las fracciones de menor a mayor o viceversa. Algunos criterios para ordenar las fracciones se presentan a continuación:

- Si dos o más fracciones tienen igual denominador, entonces es mayor la fracción que posea mayor numerador.

$$\frac{10}{9} < \frac{16}{9}$$

  En general, sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Longleftrightarrow a < b$$

- Si dos o más fracciones tienen igual numerador, entonces es mayor la fracción con menor denominador.

$$\frac{15}{6} < \frac{15}{2}$$

  En general, sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{c} \Longleftrightarrow c < b$$

- Si dos o más fracciones tienen distinto denominador y numerador la relación de orden se define del siguiente modo:

$$\frac{1}{2} > \frac{2}{-3}$$
$$\frac{(1 \cdot -3) - (2 \cdot 2)}{2 \cdot -3} > 0$$
$$\frac{7}{6} > 0$$

En general, sean $a, b \in Z$ y $c, d \in Z - \{0\}$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} > 0$$

3.3. Operaciones básicas en Q

3.3.1. Adición de números racionales

Al sumar o restar dos fracciones obtenemos una fracción cuyo numerador corresponde a la suma o resta de dos enteros y cuyo denominador corresponde al máximo común divisor entre los denominadores iniciales. Por ejemplo

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{5 + 12}{30} = \frac{17}{30}$$
$$\frac{-4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-8 - 9}{6} = \frac{-17}{6}$$
$$\frac{20}{13} + \frac{3}{13} = \frac{20 + 3}{13} = \frac{23}{13}$$

La adición o sustracción de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

En el caso de que los denominadores sean iguales, la expresión anterior se puede reducir a:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

3.3.3. Multiplicación de números racionales

Al multiplicar dos fracciones obtenemos una fracción cuyo numerador corresponde al producto de los numeradores iniciales y el denominador corresponde al producto de los denominadores iniciales. Por ejemplo

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{12} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 12} = \frac{14}{36}$$

La multiplicación de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

4.3.3. División de números racionales

Al dividir dos fracciones obtenemos una fracción cuyo resultado corresponde a la multiplicación cruzada de los numeradores y denominadores de las fracciones. Por ejemplo

$$\frac{11}{3} : \frac{6}{5} = \frac{11 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{55}{18}$$

$$\frac{11}{3} : -4 = \frac{11}{3} : \frac{-4}{1} = \frac{-11}{12}$$

La división de racionales se define entonces se la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

✍ *Ejercicios* 4

Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

1. $\frac{4}{7}$; $\frac{23}{12}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{15}{100}$
2. $12,\overline{4}$; $-10,\overline{2345}$; $0,57\overline{6}$; $23,66$
3. $\frac{5}{9} + 4,3\overline{2}$; $\frac{14}{35} : \frac{15}{9}$; $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{12} - \frac{-12}{5}$
4. $\dfrac{\frac{3}{5} + 1,\overline{12}}{4}$; $\frac{-12}{6}$; $\dfrac{5}{1 + \dfrac{1}{4 + \frac{2}{7}}}$